**Erinnerung:**

**Definition:** Ein Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren in $V$ heisst *geordnete Basis von* $V$, wenn die lineare Abbildung

$$\boxed{\varphi_T \colon K^n \to V,} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

$$\sum x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

bijektiv, also ein Isomorphismus ist.

**Definition:** Seien $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$ und $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von $W$. Die *Darstellungsmatrix* einer linearen Abbildung $f \colon V \to W$ *bezüglich der Basen* $B$ *und* $B'$ ist die eindeutig bestimmte $m \times n$-Matrix $A$, für die $f \circ \varphi_B = \varphi_{B'} \circ L_A$ gilt, das heisst, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \arrow[r, "L_A"] & K^m. \arrow[u, "\varphi_{B'}", "\wr"'] \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen diese Matrix $A$ mit $\boxed{{}_{B'}[f]_B}$.

Eine explizite Rechnung mit dem Ansatz $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ liefert für alle $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$f(v_j) = f(\varphi_B(e_j)) = \varphi_{B'}(L_A(e_j)) = \varphi_{B'}(Ae_j) = \varphi_{B'}\Bigg(\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}\Bigg) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

**Beispiel:** Die Darstellungsmatrix von $L_A \colon K^n \to K^m$ bezüglich der jeweiligen Standardbasis ist $A$.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L_A"] & K^m \\ K^n \arrow[u, "\mathrm{id}", "\cong"'] \arrow[r, "L_A"] & K^m \arrow[u, "\mathrm{id}"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

qed.

**Proposition:** Für jede geordnete Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ gilt

$$\boxed{{}_B[\mathrm{id}_V]_B = I_n.}$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V \\ K^n \arrow[u, "\varphi_B"', "\cong"] \arrow[r, "\mathrm{id}", "L_{I_n}"'] & K^n \arrow[u, "\varphi_B"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

qed.

**Proposition:** Sei $B$, $B'$, $B''$ je eine geordnete Basis von $U$, $V$, bzw. von $W$. Für alle linearen Abbildungen $f \colon U \to V$ und $g \colon V \to W$ gilt dann

$$\boxed{\underbrace{{}_{B''}[g \circ f]_B}_{B \cdot A} = \underbrace{{}_{B''}[g]_{B'}}_{B} \cdot \underbrace{{}_{B'}[f]_B}_{A}.}$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] & W \\ K^l \arrow[u, "\varphi_B"', "\cong"] \arrow[r, "L_A"] \arrow[rr, bend right, "L_{BA}"'] & K^m \arrow[u, "\varphi_{B'}"', "\cong"] \arrow[r, "L_B"] & K^n \arrow[u, "\varphi_{B''}"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

qed.

**Proposition:** Seien $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$ und $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von $W$. Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn die Darstellungsmatrix ${}_{B'}[f]_B$ quadratisch und invertierbar ist, und dann gilt ${}_B[f^{-1}]_{B'} = {}_{B'}[f]_B^{-1}$.

$f(v) \quad v \in V$

$B$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \arrow[r, "L_A"] \arrow[ur, phantom, "/\!/\!/"] & K^m \arrow[u, "\varphi_{B'}", "\wr"'] \end{tikzcd}$$

$A := {}_{B'}[f]_B$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f^{-1}", "\sim"'] & V \\ K^m \arrow[u, "\varphi_{B'}", "\wr"'] \arrow[r, "\sim", "L_A^{-1}"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/\!/"] & K^n \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \end{tikzcd}$$

$L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$

$f$ invertierbar $\Rightarrow$ $L_A : K^n \to K^m$ ist Isom.

$\Rightarrow$ $n = m$ und $A$ inv.bar.

$\Rightarrow$ ${}_B[f^{-1}]_{B'} = A^{-1}$.

$A$ quadratisch & inv.bar $\Rightarrow$ $L_A$ Isom.

$\Rightarrow$ $f = \varphi_{B'} \circ L_A \circ \varphi_B^{-1}$ Isom.

qed.

## 5.7 Basiswechsel

$V \xrightarrow{id} V$

**Definition:** Die Matrix ${}_{\tilde{B}}[\mathrm{id}_V]_B$ für geordnete Basen $B$ und $\tilde{B}$ desselben Vektorraums $V$ heisst die zu $B$ und $\tilde{B}$ assoziierte *Basiswechselmatrix.*

**Proposition:** Die Basiswechselmatrix ${}_{\tilde{B}}[\mathrm{id}_V]_B$ ist invertierbar, und ihre Inverse ist gleich ${}_B[\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}} = {}_{\tilde{B}}[\mathrm{id}_V]_B^{-1}$.

Bew.: $id_V$ Isomorphismus $\Rightarrow$ ${}_{\tilde{B}}[id_V]_B$ inv.bar. Obige Prop. qed.

**Proposition:** Seien $B$, $\tilde{B}$ geordnete Basen von $V$, und $B'$, $\tilde{B}'$ geordnete Basen von $W$. Dann gilt für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$

$$\boxed{{}_{\tilde{B}'}[f]_{\tilde{B}} = {}_{\tilde{B}'}[\mathrm{id}_W]_{B'} \cdot {}_{B'}[f]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}}.}$$

$\underline{\text{Bew.}}$: ${}_{\tilde{B}'}[\mathrm{id}_W]_{B'} \cdot {}_{B'}[f]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}} = {}_{\tilde{B}'}[\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V]_{\tilde{B}} = {}_{\tilde{B}'}[f]_{\tilde{B}}$

$\underline{\text{qed}}$.

**Spezialfall:** Seien $B$ und $\tilde{B}$ geordnete Basen von $V$. Dann gilt für jede lineare Abbildung $f\colon V \to V$

$$\begin{aligned}
{}_{\tilde{B}}[f]_{\tilde{B}} &= {}_{\tilde{B}}[\mathrm{id}_V]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}} \\
&= {}_{\tilde{B}}[\mathrm{id}_V]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_{\tilde{B}}[\mathrm{id}_V]_B^{-1} \\
&= {}_B[\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}}^{-1} \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}}.
\end{aligned}$$

$\underline{\text{Bem.}}$: Die Matrix $UAU^{-1}$ heisst ähnlich oder konjugiert zu $A$

## Beispiel:

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \{a + bX + cX^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$ mit der geordneten Basis $B := (1, X, X^2)$. Betrachte ausserdem den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$. Betrachte die lineare Abbildung

$$F\colon V \to \mathbb{R}^3,\ P \mapsto \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen ihre Darstellungsmatrix $M$ durch:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, equal, "\varphi_E = \mathrm{id}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \arrow[r, "L_M"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a + bX + cX^2 \arrow[r, mapsto, "F"] & \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ a+2b+4c \end{pmatrix} \arrow[d, equal] \\
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \arrow[u, mapsto, "\varphi_B"] & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Daher folgt

$$\boxed{{}_E[F]_B \;=\; M \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.}$$

Betrachte nun die folgende Basis von $V$:

$$B' := \Big(\frac{(X-1)(X-2)}{2},\ X(2-X),\ \frac{X(X-1)}{2}\Big).$$

Wir berechnen jetzt die Darstellungsmatrix durch:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, equal, "\varphi_E = \mathrm{id}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\varphi_{B'}", "\wr"'] \arrow[r, "L_{M'}"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\boxed{a\frac{(X-1)(X-2)}{2} + bX(2-X) + c\frac{X(X-1)}{2}} \arrow[r, mapsto, "F"] & \boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \arrow[d, equal] \\
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \arrow[u, mapsto, "\varphi_{B'}"] & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Daher folgt

$$\boxed{{}_E[F]_{B'} \;=\; M' \;:=\; I_3.}$$

Aus der Rechnung

$$\underline{I_3 \;=\; {}_E[F]_{B'} \;=\; {}_E[F]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{B'} \;=\; M \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{B'}}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\underline{{}_B[\mathrm{id}_V]_{B'} \;&=\; M^{-1},} \\
\underline{{}_{B'}[\mathrm{id}_V]_B \;&=\; M.}
\end{aligned}$$

Betrachte nun den Endomorphismus:

$$\boxed{D\colon V \to V,\ P \mapsto \frac{dP}{dX}.}$$

Wir berechnen jetzt seine Darstellungsmatrix durch:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "D"] & V \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \arrow[r, "L_N"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a + bX + cX^2 \arrow[r, mapsto, "D"] & b + 2cX \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \arrow[u, mapsto, "\varphi_B"] & \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[u, "\varphi_B"'] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

Daher folgt

$$\boxed{{}_B[D]_B = N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Daraus folgt weiter

$$\underline{{}_{B'}[D]_{B'}} = \underline{{}_{B'}[\mathrm{id}_V]_B \cdot {}_B[D]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{B'}} = M \cdot N \cdot M^{-1} = \ldots = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.}$$

## 5.8 Rang

**Definition:** Der *Rang* einer linearen Abbildung $f$ ist $\mathrm{Rang}(f) := \dim \mathrm{Bild}(f)$.

**Proposition:** Für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ und beliebige Isomorphismen $\varphi\colon V' \xrightarrow{\sim} V$ und $\psi\colon W \xrightarrow{\sim} W'$ gilt

$$\mathrm{Rang}(\psi \circ f \circ \varphi) = \mathrm{Rang}(f).$$

$W \xrightarrow[\sim]{\psi} W'$, $\mathrm{Bild}(f) \subset W$, $\mathrm{Bild}(\psi\circ f\circ\varphi) \subset W'$, $\mathrm{Bild}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(\psi\circ f\circ\varphi)$

Bew.: Beh.: $\mathrm{Bild}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(\psi\circ f\circ\varphi)$, $w \mapsto \psi(w)$.

$\mathrm{Bild}(\psi\circ f\circ\varphi) = \{\psi(f(\varphi(v'))) \mid v' \in V'\} = \{\psi(f(v)) \mid v \in V\} = \{\psi(w) \mid w \in \mathrm{Bild}(f)\}$.

Also $\mathrm{Rang}(f) = \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathrm{Bild}(\psi\circ f\circ\varphi) = \mathrm{Rang}(\psi\circ f\circ\varphi)$. qed.

**Satz:** Für jede $m \times n$-Matrix $A$ existieren invertierbare Matrizen $U$ und $V$, so dass $U\,A\,V$ eine Blockmatrix der Form

$$\boxed{UAV = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)}$$

ist für ein geeignetes $0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$, wobei jeweils $O$ die Nullmatrix bezeichnet.

Bew.: §3: $\exists U$ invbar $\exists P$ Permutationsmatrix $UAP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline O & O \end{array}\right)$

Rechne:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline O & O \end{array}\right)}_{UAP} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & -B \\ \hline O & I_k \end{array}\right)}_{W} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

Folglich $UAPW$ hat die gewünschte Form, setze $V := PW$. qed.

**Satz:** Die obige Zahl $r$ ist gleich

✓ (a) der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten von $A$ *(Spaltenrang)*.

(b) der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen von $A$ *(Zeilenrang)*.

✓ (c) dem Rang der linearen Abbildung von Spaltenvektoren $L_A \colon K^n \to K^m$, $v \mapsto Av$.

(d) dem Rang der linearen Abbildung von Zeilenvektoren $R_A \colon K^m \to K^n$, $v \mapsto vA$.

Insbesondere hängt $r$ nur von $A$ ab.

Bew: (c)

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\sim", "L_V"'] \arrow[rrr, bend right, "L_{UAV}"'] & K^n \arrow[r, "L_A"'] & K^m \arrow[r, "\sim", "L_U"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \mathrm{Rang}(L_A) = \mathrm{Rang}(L_{UAV}) = r$

$\mathrm{Bild}(L_{UAV}) = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ hat Dim. $r$ $\Big\} \Rightarrow$ (c)

(a) Die $\underbrace{\text{Spalten von } A}_{\text{sind die Vektoren } Ae_i}$ erzeugen $\mathrm{Bild}(L_A)$. eine maximale lin. unabhängige Teilmenge ist eine Basis, also ist (a) = (c).

(b) (d): $(UAV)^T = V^T \cdot A^T \cdot U^T = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = $ max Zahl lin. unabh. Spalten von $A^T$ = Zeilen von $A$. $\Rightarrow$ (b)

analog (d).

qed.

**Definition:** Die Zahl $r$ heisst der *Rang* von $A$ und wird bezeichnet mit $\mathrm{Rang}(A)$.

**Proposition:** Für jede lineare Abbildung $f$ und je zwei geordnete Basen $B$ und $B'$ gilt

$$\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}({}_{B'}[f]_B).$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \arrow[r, "L_A"'] \arrow[ur, phantom, "//"] & K^m \arrow[u, "\varphi_{B'}", "\wr"'] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(\varphi_{B'}^{-1} \circ f \circ \varphi_B) = \mathrm{Rang}(L_A) = \mathrm{Rang}(A).$$

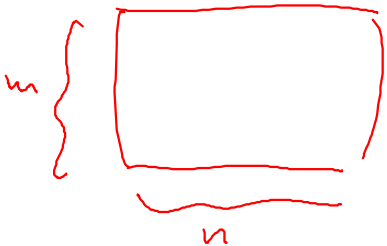
$$A = {}_{B'}[f]_B.$$

qed

**Beispiel:** Eine $m \times m$-Matrix hat Rang $m$ genau dann, wenn sie invertierbar ist.

Bew.: $UAV = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = m \Longleftrightarrow \exists\, U, V$ inv.bar: $UAV = I_m$.

**Beispiel:** Eine $m \times n$-Matrix hat Rang $m$ genau dann, wenn man aus ihren Spalten Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ auswählen kann, so dass die Matrix $(v_1, \ldots, v_m)$ invertierbar ist.



Bsp.: $r = 0 \iff A = 0$.

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rang 1.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ "

Prop.: $f : V \to W$ lin. Abb., $\dim(V), \dim(W) < \infty$
$\Rightarrow$ $\exists$ geordnete Basen $B, B'$ so dass ${}_{B'}[f]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

mit $r = \mathrm{Rang}(f)$.